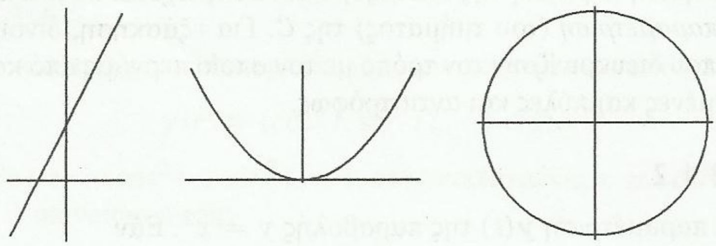
Καμπύλες στο επίπεδο και στο χώρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε δύο μαθηματικές διατυπώσεις της διαισθητικής έννοιας της καμπύλης. Η ακριβής σχέση μεταξύ τους προκύπτει τελικά ότι είναι πολύ λεπτή, έτσι θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας κάποια παραδείγματα από την κάθε μία μορφή καμπυλών όπως επίσης και πρακτικούς τρόπους για να περνάμε από την μια μορφή καμπύλης στην άλλη.

1.1 Τι είναι μία καμπύλη;

Εάν μας ζητηθεί να δώσουμε το παράδειγμα μιας καμπύλης, μπορούμε να σκεφτούμε μια ευθεία, έστω την $y - 2x = 1$ (αν και αυτή δεν είναι «καμπυλωμένη»!), ή έναν κύκλο, έστω τον $x^2 + y^2 = 1$, ή ίσως μια παραβολή, έστω την $y - x^2 = 0$.



$y-2x=1$ $\quad$ $y-x^2=0$ $\quad$ $x^2+y^2=1$

Σχήμα 1.1.

Όλες αυτές οι καμπύλες περιγράφονται από την καρτεσιανή τους εξίσωση

$$f(x, y) = c,$$

όπου f είναι συνάρτηση των x και y και c είναι σταθερά. Από αυτή την άποψη, μία καμπύλη είναι ένα σύνολο σημείων, δηλαδή

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}. \tag{1.1}$$

Όλα τα παραπάνω είναι παραδείγματα καμπυλών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, αλλά μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$ – για παράδειγμα, ο άξονας x του $\mathbb{R}^3$ είναι η ευθεία που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$y = 0, \quad z = 0,$$

και γενικότερα, μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος εξισώσεων

$$f_1(x, y, z) = c_1, \ f_2(x, y, z) = c_2.$$

Καμπύλες του είδους αυτού καλούνται *καμπύλες στάθμης*. Η ιδέα πίσω από την ορολογία αυτή είναι ότι η καμπύλη στην Εξ. 1.1 για παράδειγμα, είναι το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου στα οποία η ποσότητα $f(x, y)$ λαμβάνει την τιμή (βρίσκεται στην στάθμη) c.

Όμως, υπάρχει και άλλος τρόπος για να σκεφτούμε τις καμπύλες και ο οποίος αποδεικνύεται πιο χρήσιμος σε πολλές περιπτώσεις. Κατά τον τρόπο αυτό, μία καμπύλη θεωρείται ως ο δρόμος που χαράσσεται από ένα κινούμενο σημείο. Έτσι, εάν $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου στον χρόνο t, η καμπύλη περιγράφεται από μία συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma}$ της παραμέτρου t με διανυσματικές τιμές (στον $\mathbb{R}^2$ αν πρόκειται για επίπεδη καμπύλη, στον $\mathbb{R}^3$ αν πρόκειται για καμπύλη του χώρου). Χρησιμοποιούμε αυτή την ιδέα για να δώσουμε τον πρώτο αυστηρό ορισμό της καμπύλης του $\mathbb{R}^n$ (μας ενδιαφέρουν μόνο οι περιπτώσεις $n = 2$ ή 3, αλλά είναι βολικό να πραγματευόμαστε και τις δύο περιπτώσεις ταυτόχρονα).

Ορισμός 1.1.1

Μια *παραμετρισμένη* καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, όπου α, β είναι τέτοια ώστε $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Ο συμβολισμός (α, β) δηλώνει το ανοικτό διάστημα

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < t < \beta\}.$$

Μια παραμετρισμένη καμπύλη της οποίας η εικόνα περιέχεται σε μια καμπύλη στάθμης $\mathcal{C}$ ονομάζεται *παραμέτριση* (του τμήματος) της $\mathcal{C}$. Για εξάσκηση, δίνουμε τα ακόλουθα παραδείγματα που διευκρινίζουν τον τρόπο με τον οποίο περνάμε από καμπύλες στάθμης σε παραμετρισμένες καμπύλες και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 1.1.2

Ας βρούμε μια παραμέτριση $\boldsymbol{\gamma}(t)$ της παραβολής $y = x^2$. Εάν

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

οι συνιστώσες γ_1 και γ_2 θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{1.2}$$

για όλες τις τιμές του t στο διάστημα (α, β) που ορίζεται η $\boldsymbol{\gamma}$, (ακόμα δεν έχει αποφασιστεί ποιο είναι αυτό) ενώ ιδεωδώς κάθε σημείο της παραβολής πρέπει να έχει συντεταγμένες

$(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Βεβαίως, υπάρχει μια προφανής λύση στην Εξ. 1.2: $\gamma_1(t) = t,\ \gamma_2(t) = t^2$. Για να πάρουμε κάθε σημείο πάνω στην παραβολή, πρέπει να επιτρέψουμε στο t να πάρει κάθε πραγματική τιμή (αφού η τετμημένη της $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι απλώς t, και η τετμημένη κάθε σημείου της παραβολής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός), κατά συνέπεια πρέπει να πάρουμε $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Έτσι, η επιθυμητή παραμέτριση είναι

$$\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2).$$

Αλλά αυτή δεν είναι η μόνη παραμέτριση της παραβολής. Μία άλλη επιλογή είναι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$ (με $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$). Ακόμα μία είναι η $(2t, 4t^2)$, και βεβαίως υπάρχουν και (άπειρες) άλλες. Συμπεραίνουμε ότι η παραμέτριση μια δεδομένης καμπύλης στάθμης δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα 1.1.3

Ας επιχειρήσουμε τώρα να παραμετρίσουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Είναι δελεαστικό να πάρουμε $x = t$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έτσι ώστε $y = \sqrt{1 - x^2}$ (θα μπορούσαμε επίσης να είχαμε πάρει $y = -\sqrt{1 - x^2}$). Παίρνουμε τότε την παραμέτριση $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$. Αυτή όμως είναι η παραμέτριση του άνω ημικυκλίου, διότι $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$. Ομοίως, εάν παίρναμε $y = -\sqrt{1 - x^2}$, θα είχαμε καλύψει μόνο το κάτω ημικύκλιο.

Εάν θέλουμε μία παραμέτριση όλου του κύκλου, πρέπει να προσπαθήσουμε πάλι. Χρειαζόμαστε συναρτήσεις $\gamma_1(t)$ και $\gamma_2(t)$ τέτοιες ώστε

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{1.3}$$

για όλα τα $t \in (\alpha, \beta)$, και τέτοιες ώστε *κάθε* σημείο του κύκλου να είναι ίσο με $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Υπάρχει μια προφανής λύση στην Εξ. 1.3: $\gamma_1(t) = \cos t$, $\gamma_2(t) = \sin t$ (εφόσον $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ για κάθε t). Μπορούμε να πάρουμε $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, αν και αυτό είναι υπερβολικό: είναι αρκετό να θεωρήσουμε κάθε ανοικτό διάστημα μήκους 2π.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πώς περνάμε από μια παραμετρισμένη καμπύλη σε μια καμπύλη στάθμης.

Παράδειγμα 1.1.4

Ας πάρουμε την παραμετρισμένη καμπύλη (που ονομάζεται *αστροειδές*)

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Εφόσον για κάθε t είναι $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, οι συντεταγμένες $x = \cos^3 t$ και $y = \sin^3 t$ του σημείου $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ικανοποιούν την

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Αυτή η καμπύλη στάθμης ταυτίζεται με την εικόνα της απεικόνισης $\boldsymbol{\gamma}$. Δείτε την Άσκηση 1.1.5 για μια εικόνα του αστροειδούς.